Universidad Simón Bolívar.
Departamento de Matemáticas
Puras y Aplicadas.

30 de enero de 2004.
Matemáticas II (MA–1112)

1$^{\text{er}}$ Parcial.
TIPO B

Justifique <u>todas</u> sus respuestas.

1. (9 puntos)
Halle la antiderivada más general de las siguientes funciones:

$$a)\ \ f(u) = \frac{\arctan(u)}{1+u^2} \qquad\qquad b)\ \ g(s) = \frac{\operatorname{sen}(\sqrt{s})}{\sqrt{s}}$$

c) Halle el valor de la siguiente integral definida: $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(x)}{(1+\operatorname{sen}(x))^2}\,dx$

Solución:

$$a)\ \ \frac{\arctan^2(u)}{2} + C \qquad\qquad b)\ \ -2\cos(\sqrt{s}) + C$$

c) Hacemos $u = 1 + \operatorname{sen}(x)$, $\quad du = \cos(x)dx$, $\quad x = 0 \rightarrow u = 1$, $\quad x = \dfrac{\pi}{2} \rightarrow u = 2$

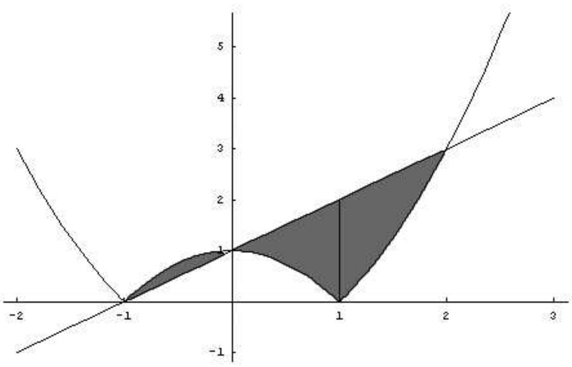
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(x)}{(1+\operatorname{sen}(x))^2}\,dx = \int_1^2 \frac{du}{u^2} = \left.\frac{-1}{u}\right|_1^2 = \frac{-1}{2} - (-1) = \frac{1}{2}$$

---

2. (5 puntos) Calcule el área de la región comprendida entre las gráficas de

$$f(x) = x + 1 \qquad \text{y} \qquad g(x) = |x^2 - 1|.$$

Solución:



$$\text{Área} = \underbrace{\int_{-1}^{0} [(1-x^2)-(x+1)]dx}_{A} + \underbrace{\int_0^1 [(x+1)-(1-x^2)]dx}_{B} + \underbrace{\int_1^2 [(x+1)-(x^2-1)]dx}_{C}$$

$$A = \int_{-1}^{0} (-x^2 - x)dx = \left.\left(\frac{-x^3}{3} - \frac{x^2}{2}\right)\right|_{-1}^{0} = 0 - \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{6}$$

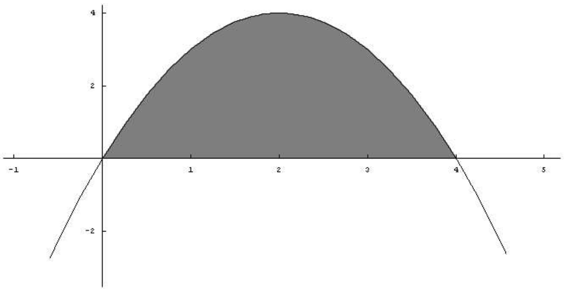
$$B = \int_0^1 (x + x^2)dx = \left.\left(\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}\right)\right|_0^1 = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) - 0 = \frac{5}{6}$$

$$C = \int_1^2 (2 + x + x^2)dx = \left.\left(2x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}\right)\right|_1^2 = \left(4 + \frac{4}{2} + \frac{8}{3}\right) - \left(2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) = \frac{7}{6}$$

$$\boxed{\text{Área} = \tfrac{13}{6}}$$

3. (5 puntos) Usando sumas de Riemann, calcule el área entre la gráfica de la función $f(x) = 4x - x^2$ y el eje x.

Solución:



$$f(x) = 4x - x^2$$

$$\Delta x_i = \frac{4}{n},$$

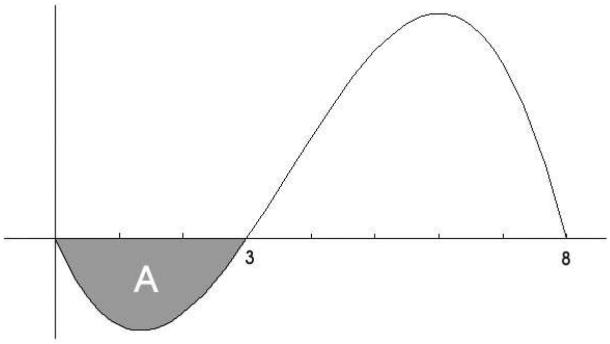
$$x_i = \frac{4i}{n} = \overline{x}_i,$$

$$f(\overline{x}_i) = 4\frac{4i}{n} - \frac{(4i)^2}{n^2}.$$

$$\begin{aligned}
\text{Área} &= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(\overline{x}_i)\Delta x_i = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{16i}{n} - \frac{16i^2}{n^2} \right) \frac{4}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{64}{n^2} \left(\sum_{i=1}^{n} i - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} i^2 \right) \\
&= 64 \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} \frac{n(n+1)}{2} - \frac{1}{n^3} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = 64 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) = 64\frac{1}{6} = \frac{32}{3}
\end{aligned}$$

---

4. (6 puntos) La gráfica de la función f es:



si la región sombreada A tiene área $\frac{3}{2}$ y $\int_0^8 f(x)dx = \frac{5}{2}$, calcule:

a) $\int_0^8 |f(x)|dx$.

b) El valor promedio de f en $[3, 8]$.

Solución:

$$\begin{aligned}
\int_0^8 f(x)dx &= \int_0^3 f(x)dx + \int_3^8 f(x)dx \\
\frac{5}{2} &= -\text{Área}(A) + \int_3^8 f(x)dx \\
\frac{5}{2} &= -\frac{3}{2} + \int_3^8 f(x)dx
\end{aligned}$$

de donde obtenemos

$$\int_3^8 f(x)dx = 4$$

$$\begin{aligned}
a) \int_0^8 |f(x)|dx &= \int_0^3 (-f(x))dx + \int_3^8 f(x)dx \\
&= \text{Área}(A) + \int_3^8 f(x)dx \\
&= \frac{3}{2} + 4 = \frac{11}{2}
\end{aligned}$$

$$b) \text{ Valor Promedio} = \frac{1}{8-3} \int_3^8 f(x)dx = \frac{4}{5}$$

---

5. (5 puntos) Pruebe que la función

$$H(x) = \int_0^{1/x} \frac{1}{t^2+1}\, dt + \int_0^{x} \frac{1}{t^2+1}\, dt,$$

definida para $x > 0$, es constante.

Solución: Derivando obtenemos que:

$$H'(x) = \left(\frac{1}{(\frac{1}{x})^2 + 1} \right) \frac{-1}{x^2} + \frac{1}{x^2+1} = \frac{-1}{1+x^2} + \frac{1}{x^2+1} = 0$$

por lo tanto, $H(x)$ es constante.